EUCLIDES

MAANDBLAD
VOOR DE DIDACTIEK VAN DE WISKUNDE

ORGAAN VAN
DE VERENIGINGEN WIMECOS EN LIWENAGEL
EN VAN DE WISKUNDE-WERKGROEP VAN DE W.V.O.

MET VASTE MEDEWERKING VAN VELE WISKUNDIGEN
IN BINNEN- EN BUITENLAND

43e JAARGANG 1967/1968

X — 15 JULI 1968

INHOUD

WOLTERS-NOORDHOFF NV — GRONINGEN

Het tijdschrift **Euclides** verschijnt in tien afleveringen per jaar. Prijs per jaargang *f* 8,75; voor hen die tevens geabonneerd zijn op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde is de prijs *f* 7,50.

De leden van *Wimecos* krijgen *Euclides* toegezonden als officieel orgaan van hun vereniging. De contributie bedraagt f 9,00 (abonnement inbegrepen), over te schrijven naar postrekening 143917, ten name van Wimecos, Amsterdam. Het verenigingsjaar begint op 1 sept.

De leden van *Liwenagel* krijgen *Euclides* toegezonden voorzover ze de wens daartoe te kennen geven aan de Penningmeester van Liwenagel te Heemstede; postrekening 87185.

Hetzelfde geldt voor de leden van de *Wiskunde-werkgroep van de W.V.O.* Zij kunnen zich wenden tot de penningmeester van de Wiskunde-werkgroep W.V.O. te Haarlem; postrekening 261036 te Voorburg.

Indien geen opzegging heeft plaatsgehad en bij het aangaan van het abonnement niets naders is bepaald omtrent de termijn, wordt aangenomen, dat men het abonnement continueert.

Opgaven voor deelname aan de Leesportefeuille met buitenlandse tijdschriften aan G. A. J. Boost, Parklaan 107 A, Roosendaal (NB).

Boeken ter bespreking en aankondiging aan Dr. W. A. M. Burgers te Wassenaar.

Artikelen ter opname aan Dr. Joh. H. Wansink te Arnhem.

Opgaven voor de „kalender" in het volgend nummer binnen drie dagen na het verschijnen van dit nummer in te zenden aan Drs. A. M. Koldijk, Joh. de Wittlaan 14 te Hoogezand.

Aan de schrijvers van artikelen worden gratis 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt; voor meer afdrukken overlegge men met de uitgever.

EUCLIDES

MAANDBLAD
VOOR DE DIDACTIEK VAN DE WISKUNDE

ORGAAN VAN
DE VERENIGINGEN WIMECOS EN LIWENAGEL
EN VAN DE WISKUNDE-WERKGROEP VAN DE W.V.O.

MET VASTE MEDEWERKING VAN VELE WISKUNDIGEN
IN BINNEN- EN BUITENLAND

43e JAARGANG 1967/1968

WOLTERS-NOORDHOFF N.V. — GRONINGEN

INHOUD VAN DE 43STE JAARGANG

ARTIKELEN EN VOORDRACHTEN

KORRELS

RAPPORTEN EN VERSLAGEN

DIVERSEN

BESPREKING VAN BOEKEN EN TIJDSCHRIFTEN

ZWAARTEPUNTEN EN CONVEXE VERZAMELINGEN

door

Prof. dr. A. F. MONNA

Bij het lezen van de eindexamenopgaven voor stereometrie verwondert men er zich over hoe het steeds maar weer mogelijk blijkt in één kubus nieuwe lijnen en vlakken te vinden die loodrecht op elkaar staan of waarvan de (kortste) afstand kan worden berekend. Met zorg vraagt men zich af wat er zal moeten gebeuren als het arsenaal zal zijn uitgeput. Het komt mij voor dat er in de meetkunde zinvoller zaken bij het onderwijs ter sprake kunnen komen. In hetgeen volgt wordt iets medegedeeld over zwaartepunten en convexe verzamelingen. Docenten kunnen overwegen of zij in dit onderwerp iets bruikbaars vinden, eventueel voor de behandeling van een speciaal onderwerp. Misschien zijn er geen sommen over te verzinnen. Is dat erg? Uiteraard ben ik er mij van bewust dat in hetgeen volgt veel verder wordt gegaan dan de schoolstof zal kunnen omvatten. Men zie deze beschouwingen in het kader van ,,Elementar mathematik vom höheren Standpunkte aus''.

1. *Driehoeken en cirkels*

Het doet er niet toe in welke ruimte we inbedden: R^2, R^3 of R^n.
Stelling. Zij gegeven een driehoek, waarvan de hoekpunten in vectornotatie zijn x_1, x_2, x_3. *Elk punt* x *binnen of op de driehoek is zwaartepunt van passende massa's* m_1, m_2, m_3 *in resp.* x_1, x_2, x_3 *waarbij* $m_i \geqq 0$, $\Sigma m_i = 1$. *Dus*

$$x = m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3.$$

Het zwaartepunt is in de mechanica gedefinieerd door

$$\frac{\Sigma \lambda_i x_i}{\Sigma \lambda_i}.$$

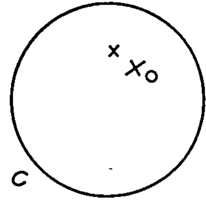
Dit zwaartepunt hangt niet af van het coördinatensysteem. Het is een kwestie van lineaire algebra om te bewijzen dat de voorstelling van x eenduidig is. Men merke op dat men elk punt van het vlak van de driehoek op deze manier kan voorstellen mits men ook niet-positieve massa's toelaat.
Stel dezelfde vragen voor een cirkel.

Stelling. Elk punt van een cirkelschijf is zwaartepunt van een massaverdeling op de cirkelomtrek met positieve massa en totale massa 1.

Genoteerd

$$x_0 = \int_C x \, d\mu$$

met $\int d\mu = 1$, $\mu \geqslant 0$.

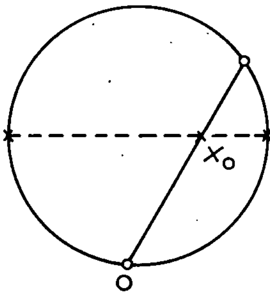


De integraal is hierin een vectorwaardige integraal (op de definitie daarvan wordt niet ingegaan). Is er een dichtheid ρ dan komt

$$x_0 = \int_C \rho\,(x) x \, ds.$$

Voor de driehoek geldt: een hoekpunt, bijv. x_1, verkrijgt men door de massa 1 in x_1 en $m_2 = m_3 = 0$.
Voor de cirkel geldt: is $x_0 \in C$, dan is de eenheidsmassa in x_0 de enige verdeling die x_0 als zwaartepunt levert.

Bij de cirkel is er geen eenduidigheid

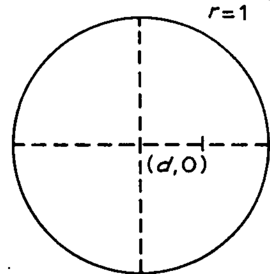


Dit laat zich gemakkelijk illustreren aan voorbeelden. (Zie de figuur die voor zichzelf spreekt).
Misschien zou in een klasse een analytische behandeling aan de orde kunnen worden gesteld. Men zou dan komen tot de bespreking van de vergelijkingen

$$\int_0^{2\pi} \rho(\varphi) \cos \varphi \, d\varphi = d$$

$$\int_0^{2\pi} \rho(\varphi) \sin d\varphi = 0$$

met $\int_0^{2\pi} \rho(\varphi) d\varphi = 1,\ \rho \geqq 0$



ter bepaling van ρ. Dit leidt dan tot een *onbepaald probleem*. Ontmoeten de leerlingen ooit onbepaalde problemen?

In aansluiting hierop zouden misschien hogere momenten van een verdeling ter sprake kunnen komen; ik denk bijv. aan traagheidsmomenten (momentenprobleem).

Er is nog een zekere samenhang tussen beide gevallen. Om die op te helderen moeten de convexe verzamelingen worden ingevoerd.

2. *Convexiteit*

Zij E een lineaire ruimte over R. Het is niet nodig iets te onderstellen aangaande de dimensie van E. De dimensie mag oneindig zijn. E is niet voorzien van een topologie.

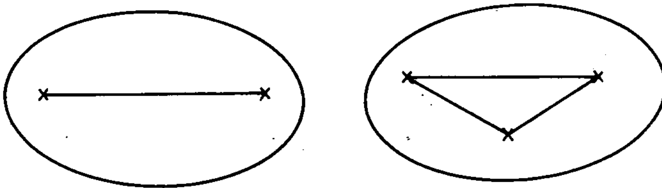
Definitie. Een verzameling $S \subset E$ heet convex indien

$$x,y \in S \Rightarrow \lambda x + (1-\lambda)y \in S \textit{ voor alle } 0 \leqq \lambda \leqq 1.$$

Men kan de definitie nog iets ruimer formuleren, n.l.

$$x_1, \ldots, x_n \in S \Rightarrow \sum_i^n \lambda_i x_i \in S \text{ voor alle } \lambda_i \geqq 0, \sum \lambda_i = 1.$$

Deze definities zijn equivalent (volledige inductie).



Voorbeelden van convexe verzamelingen zijn er in ruime mate in de schoolwiskunde. Er zijn ook minder gewone.

Voorbeeld. Beschouw R^3 met coördinaten x_1, x_2, x_3.

V_1 zij de verzameling van de punten met $x_3 > 0$; V_2 die waarvoor $x_3 = 0$, $x_2 > 0$. Dan is $V = V_1 \cup V_2$ convex. Aan dit voorbeeld kan men, het zij terloops opgemerkt, illustreren dat men twee convexe verzamelingen niet altijd kan scheiden door een (hyper)vlak. Beschouw naast V n.l. de rechte $x_2 = 0$, $x_3 = 0$.
Er gelden triviale eigenschappen waar niet op wordt ingegaan (doorsnede, affiene transformaties).

Definitie. Zij $A \subset E$. Het convex omhulsel $C(A)$ van A is de doorsnede van alle convexe verzamelingen die A bevatten.

Inderdaad is $C(A)$ convex. Men bewijst:
$C(A)$ is de verzameling van alle eindige combinaties

$$\sum \lambda_i x_i \text{ met } \lambda_i \geqq 0, \sum \lambda_i = 1,$$

als x_i de verzameling A doorloopt.
Het begrip extremaalpunt is essentieel voor hetgeen volgt.

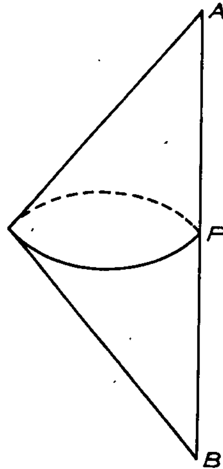
Definitie. $A \subset E$ *zij convex.* $x \in A$ *heet extremaalpunt van* A *indien er geen open segment is in* A *dat* x *bevat.*

Anders gezegd: uit $x = \lambda y + (1-\lambda)z$, $0 \leqq \lambda \leqq 1$, $y,z \in A$ volgt $\lambda = 0$ of $\lambda = 1$.

Voorbeelden

(i) Beschouwen we de verzameling van de punten binnen een driehoek, dan heeft die convexe verzameling geen extremaalpunten. Nemen we de „rand" erbij, dan zijn de hoekpunten de extremaalpunten.

(ii) Voor een gesloten cirkelschijf zijn alle punten van de „rand" extremaal.



(iii) Van het „gesloten" lichaam in bijgaande figuur zijn extremaal de punten A, B en alle punten van de cirkel behalve P. Bedden we dit lichaam in R^3, dus met topologie, dan kan men uit dit voorbeeld besluiten tot:

Zelfs van een compacte convexe verzameling behoeft de verzameling van de extremaalpunten niet gesloten te zijn.

(iv) Beschouw in R^n de bol $\sum_1^n x_i^2 \leqq 1$. Extremaal zijn de punten $\sum_1^n x_i^2 = 1$.
Dat dit niet zo triviaal is als het lijkt blijkt uit het volgende voorbeeld.

(v) Beschouw de Hilbert-ruimte l^2 van de rijen $(x_1, x_2, \ldots)$ met $\sum_1^\infty x_i^2 < \infty$. Neem de ellipsoïde-achtige verzameling

$$\sum_1^\infty (2^i x_i)^2 \leqq 1.$$

Men kan bewijzen dat de extremaalpunten van deze verzameling dicht liggen in de convexe verzameling. In bepaalde, hier niet nader uiteen te zetten wijze, blijkt deze situatie zelfs min of meer normaal te zijn.
In R^2 doen deze pathologische gevallen zich niet voor omdat daar geldt:

A convex compact $\Rightarrow$ de verzameling van de extremaalpunten van A is gesloten.

Een andere, equivalente, definitie van het begrip extremaalpunt is de volgende.

2e definitie. Zij $A \subset E$ *convex.* $\xi \in A$ *heet extremaal indien* $A - \{\xi\}$ *convex* is.

Het lijkt dat de equivalentie van deze definities met de leerlingen kan worden behandeld.
Men gaat na dat voor de lichamen, zoals die in de schoolwiskunde kunnen voorkomen, geldt:

de convexe verzameling is het convex omhulsel van de verzameling van de extremaalpunten.

Om deze uitspraak, die bepaald niet triviaal is, en trouwens in oneindig dimensionale ruimten niet waar is, draait de verdere theorie.

Heeft elke convexe verzameling extremaalpunten? Het antwoord luidt: neen; zie het voorbeeld van de open driehoek. Maar er zijn meer instructieve voorbeelden.
Neem een cylinder in R^3. Deze convexe (niet compacte) verzameling heeft geen extremaalpunten.



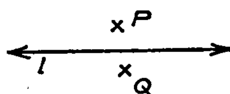
Kon tot hier toe behandeling geschieden zonder topologie (behoudens enkele uitspraken), voor hetgeen volgt is de topologie essentieel. Er wordt gewerkt in locaal convexe ruimten; de definitie daarvan blijft achterwege. Genormeerde ruimten, zoals de euclidische, vallen eronder. De ruimten mogen oneindig dimensionaal zijn; zij zijn dat zelfs in de toepassingen op de analyse. Dan geldt de volgende stelling.

Stelling. Elke convexe compacte verzameling heeft extremaalpunten.

Het bewijs van deze stelling is bepaald niet eenvoudig.

Definitie. Zij E een locaal convexe ruimte en $A \subset E$. Het gesloten *convexe omhulsel is de doorsnede van alle gesloten convexe verzamelingen die A bevatten.*

Vrij evident is dat het gesloten convex omhulsel is de afsluiting van het convex omhulsel.
Opmerking. Het convex omhulsel van een verzameling is niet steeds gesloten; zie de figuur (die voor zichzelf spreekt). Het convex omhulsel van de verzameling, bestaande uit de lijn l en de punten P en Q is niet gesloten.



Notatie. De afsluiting van een verzameling A wordt aangegeven door $\bar{A}$. Is A convex dan is A_e de verzameling van de extremaalpunten. Over het verband tussen extremaalpunten en convexe omhulsels geldt dan de volgende stelling.
Stelling van Krein-Milman. Zij $A \subset E$ convex compact. Dan is

$$A = \overline{C(A_e)}.$$

D.w.z. $C(A_e)$ ligt dicht in A.
Men kan niet algemeen bewijzen dat $A = C(A_e)$, zoals dat in de schoolvoorbeelden het geval is; het geldt ook niet algemeen. Een andere formulering is:

De verzameling van de punten van de vorm $\sum \lambda_i x_i$, $\lambda_i \geqq 0$, $\sum \lambda_i = 1$, eindig veel λ_i ongelijk $0, x_i \in A_e$, ligt dicht in A.

Interpretatie in termen van zwaartepunten.

Een massaverdeling die bestaat uit de massa 1, geplaatst in het punt x, wordt aangeduid door ε_x (Dirac-maat). Op A_e krijgen we dan verdelingen $\sum \lambda_i \; \varepsilon_{x_i}$ (eindige combinaties). Het zwaartepunt van zo'n verdeling is $\sum \lambda_i x_i$. Dan zegt de stelling

Een overal dichte verzameling in A kan men verkrijgen als zwaartepunt van passende massaverdelingen op A_e.
Probleemstelling. Gevraagd condities waaronder elk punt van A is te verkrijgen als zwaartepunt van massa op A_e.

De behandeling van dit probleem voert in de maattheorie. En wel de maattheorie in de vorm van een theorie van lineaire vormen op de ruimte van de continue functies op een verzameling. Voor het-

geen volgt is het voldoende op te merken dat per definitie voor de Dirac-maat in x geldt

$$\varepsilon_x(f) = f(x)$$

voor alle continue f.
Men moet nu definiëren wat zal zijn te verstaan onder het begrip zwaartepunt. De volgende heuristische beschouwing geeft de richting aan waarin dat kan geschieden.

Zij μ een maat die een eindige combinatie is van Dirac-maten met totale massa 1:

$$\mu = \sum \lambda_i \varepsilon_{x_i}, \ \lambda_i \geqq 0, \ \sum \lambda_i = 1.$$

Zij A een convexe verzameling. Zij f een affien-lineaire functie op A, d.i. een functie die voldoet aan de conditie:

$$\text{voor } x,y \in A \text{ en alle } 0 \leqq \lambda \leqq 1 \text{ is}$$
$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) = \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

Dan geldt

$$\mu(f) = \int f \mathrm{d}\mu = \sum \lambda_i \varepsilon_{x_i}(f) = \sum \lambda_i f(x_i) = f(\sum \lambda_i x_i).$$

Stellen we nu $x_\mu = \sum \lambda_i x_i$, d.i. het zwaartepunt van μ, dan is dus $\mu(f) = f(x_\mu)$ voor alle affien-lineaire f op A.
Deze eigenschap is het uitgangspunt voor de definitie van het zwaartepunt van een maat $\mu \geqslant 0$ met totale massa 1 op een convexe compacte verzameling A.

Stelling. Voor elke $\mu \geqq 0$, $\mu(A) = 1$, *is er een eenduidig bepaald punt* $x_\mu \in A$ *met*

$$\mu(f) = f(x_\mu)$$

voor alle affien-lineaire f.
Dit punt x_μ heet het *zwaartepunt* van μ.

Het probleem wordt nu:

Onderzoek of er maten $\mu \geqslant 0$ *zijn met drager* A_e *zó, dat elk punt van A zwaartepunt is van zo'n maat, die natuurlijk afhangt van het punt.*

Voor een overal dichte verzameling gelukt dit (eindige combinaties van Dirac-maten), maar algemeen gaat dit niet. Men kent condities waaronder het mogelijk is bijv. als A_e compact is of als A metriseerbaar, dus bijv. in R^n. Eenvoudige tegenvoorbeelden zijn daarom niet te geven.

De eenduidigheidsvraag

Denkend aan het geval van de cirkel en de driehoek moet de vraag

aan de orde worden gesteld naar de eenduidige bepaaldheid van een maat μ die een oplossing van het probleem geeft.
Men kan bewijzen dat de maat μ dan en slechts dan eenduidig is bepaald als A een *simplex* is. Een simplex wordt als volgt gedefinieerd.
Definitie. Zij A convex compact in E. Zij $a \in E$.
Stel $$A' = a+\lambda A, \ \lambda \geqq 0.$$
A' heet een positief homothetisch beeld van A. Dan noemt men A een simplex in E indien de doorsnede van elk paar homeothtische beelden van A of leeg is of weer een positief homothetisch beeld van A.

Deze definitie, toegepast in R^2 of R^3, lijkt een onderwerp voor discussie met de leerlingen.

3. *Toepassing*

Zij f een reële functie op $(0, \infty)$. f heet volledig monotoon als f oneindig vaak differentiëerbaar is en $(-1)^n f^{(n)} \geqq 0$ voor $n = 0,1,2, \ldots$. Een voorbeeld is de functie $e^{-\alpha x} (\alpha \geqslant 0)$.
Stelling (Bernstein). Bij elke volledig monotone f op $(0,\infty)$ is er een eenduidig bepaalde maat $\mu \geqslant 0$ zó dat voor alle $x > 0$

$$f(x) = \int_0^\infty e^{-\alpha x} \, d\mu(x).$$

Schets van het bewijs

Zij E de ruimte van de oneindig vaak differentieerbare functies op $(0,\infty)$, voorzien van een goede topologie.
Zij A de verzameling van de $f \in E$ waarvoor $f(0^+) \leqslant 1$.
Men bewijst dat A convex en compact is in E. De extremale punten van A blijken te zijn de functies

$$x \rightarrow e^{-\alpha x}$$

voor elke $0 \leqslant \alpha \leqslant \infty$ [$e^{-\infty x}$ is per definitie de nulfunctie]. A_e blijkt compact te zijn. Volgens de theorie bestaat er een maat $\mu \geqslant 0$ op A_e, die men transformeert in een maat op $[0,\infty]$ met behulp van α. Dit leidt tot een integraal $\int \xi \, d\mu$, waarin ξ een extremaalpunt is. Omvorming geeft het gewenste resultaat.

Literatuur.

H. G. Eggleston, Convexity, Cambridge, 1963.
F. A. Valentine, Convex sets, New York, 1964.
H. Bauer, Konvexität in topologischen Vektorräumen, Universität Hamburg, 1963/1964.

FORMELE EIGENSCHAPPEN

door

Dr. P. G. J. Vredenduin

Oosterbeek

In een vorig artikel (Euclides **43**, p. 85) is een verzameling gekwalificeerd als bestaande uit alle elementen x van een reeds gedefinieerde verzameling, die een bepaalde eigenschap $E(x)$ hebben. Wat verstaan moet worden onder „eigenschap" is niet nader onderzocht. Voor schoolgebruik zou ik hier aldus te werk gaan. Neem een willekeurige uitspraak, b.v.

Jan geeft Karel een boek.

Vervang hierin een substantief door de letter x. Men krijgt b.v.

x geeft Karel een boek.

Dan is

$\{x|x$ geeft Karel een boek$\}$

de verzameling van de mensen, die Karel een boek geven. Evenzo is

$\{x|$ Jan geeft x een boek$\}$

de verzameling van de mensen aan wie Jan een boek geeft, en

$\{x|$ Jan geeft Karel $x\}$

de verzameling van de voorwerpen, die Jan aan Karel geeft. We zien zo, dat $E(x)$ gevormd wordt door in een uitspraak een substantief door een variabele te vervangen.

Hier kan de leerling gevoeglijk mee tevreden zijn. Wil de leraar voor zichzelf er wat dieper op in gaan, dan zal hij zich moeten verdiepen in de opbouw van een formeel systeem. Dit loont daarom de moeite, omdat verschillende andere in de wiskunde bij het onderwijs gebezigde termen dan ook beter begrepen worden. Zo hoort men vaak: een afbeelding is een toevoeging . . ., een functie is een voorschrift . . . . Hebben dergelijke omschrijvingen zin en zo ja, welke? Andere vragen, die van belang zijn: wat is een tweeterm?, wat is een algebraïsche vorm?, wat is een vergelijking?, wat is een parameter?

Laten we dus maar trachten door te bijten. Hoe is de structuur van een formeel systeem? Ik wil deze vraag beantwoorden door een eenvoudig voorbeeld te geven. Daaraan kan men gemakkelijker iets verduidelijken dan door een algemeen betoog.

Bekend is, dat men in de wiskunde vaak symbolen gebruikt, omdat daardoor misverstanden vermeden worden. De natuurlijke taal bevat woorden, waarvan de betekenis niet ondubbelzinnig vastligt. Door deze woorden te vervangen door symbolen, waarvan de betekenis nauwkeurig gedefinieerd is, sluit men deze misverstanden uit. Het ideale eindpunt is daarbij een mathematische tekst, waarin geen enkel woord uit de natuurlijke taal meer voorkomt en die dus geheel uit symbolen bestaat. In een dergelijke tekst zijn niet alleen alle mathematische termen door symbolen vervangen, maar ook alle logische. Hoewel we niet gewend zijn aan het consequent doorvoeren van deze symbolisering, zijn we toch allen vertrouwd met uitspraken, waarin uitsluitend symbolen voorkomen. Voor niemand zal wel tegenwoordig

$$\forall a \forall b \; a + b = b + a$$

onbegrijpelijk zijn. Als in een gebied van de wiskunde het taalgebruik consequent beperkt wordt tot gebruik van symbolen, dan spreken we van een formeel systeem.

Om enig inzicht in de structuur van een dergelijk systeem te krijgen, wil ik als voorbeeld kiezen een sterk vereenvoudigde theorie van de natuurlijke getallen. Sterk vereenvoudigd in die zin, dat we ons willen beperken tot het gebruik van een ongewoon klein aantal symbolen. Daarmee wordt natuurlijk wel bewerkstelligd, dat we maar een rudimentair stuk getallentheorie ermee kunnen opbouwen. Dat doet echter niets ter zake, want het gaat ons niet om de inhoud van de theorie, maar om de structuur.

We zullen eerst een lijst opstellen van de symbolen, die we gebruiken. Deze zijn:

1e. 1,

2e. x, y, z (eventueel voorzien van indices; wie dat wil kan de schrijfwijze van deze indices nader vastleggen),

3e. $+$ en $\cdot$,

4e. $=$,

5e. $\vee$ en $\wedge$, $\neg$, $\forall$ en $\exists$,

6e. (en).

Nu moeten we hieruit taalvormsels gaan fabriceren. We oriënteren ons eerst aan de natuurlijke taal. Daar kennen we verschillende soorten taalvormsels:

1e. Jan, een boek, De Kleine Johannes,
2e. Jan geeft een boek aan Karel, x geeft een boek aan Karel, Jan geeft een boek aan Karel en Karel geeft een boek aan Henk.

De taalvormsels onder 1e zullen we „termen" noemen en de taalvormsels onder 2e „uitdrukkingen". Bij de termen kunnen we dus denken aan al of niet individueel bepaalde objecten. Door termen door middel van relaties met elkaar te verbinden ontstaan uitdrukkingen. Bovendien kunnen daarbij op hun beurt „en", „of" e.d. gebruikt worden om uit elementaire uitdrukkingen samengestelde uitdrukkingen te vormen.

Wat zullen we in ons formele systeem nu onder een term verstaan? We maken de volgende afspraak:

1e. 1 is een term,
2e. elke variabele is een term,
3e. zijn t_1 en t_2 termen, dan is ook $(t_1 + t_2)$ een term,
4e. zijn t_1 en t_2 termen, dan is ook $(t_1 \cdot t_2)$ een term.

Om misverstand te voorkomen: t_1 en t_2 zijn geen variabelen uit ons formele systeem, maar zijn alleen gebruikt in een tekst, waarin we *over* dit systeem praten.

Termen zijn dus:

$$1,\ (1 + 1),\ ((1 + 1) + 1),\ (((1 + 1) + 1) \cdot (1 + 1)),$$
$$x,\ y,\ (x \cdot y),\ (1 + z),\ ((x + y) \cdot (x \cdot x)).$$

Schrik niet van de haakjes. Stel u eens even voor, hoe gecompliceerd de regels werden, als we niet overal klakkeloos haakjes zouden zetten, maar nauwkeurig de regels voor het gebruik van haakjes zouden formuleren. Van de complicatie te moeten vaststellen, waar haakjes wel nodig zijn en waar ze weggelaten mogen worden, zijn we bevrijd. We zetten ze altijd, nodig of niet. Dit vereenvoudigt ons systeem van regels. Voor degene, die in de praktijk de formules moet hanteren, staan er wel wat veel haakjes. Geen nood, men kan dan regels opstellen voor het *weglaten* van haakjes. Deze regels zijn echter niet bepalend voor de structuur van ons formele systeem, maar hebben alleen betrekking op een doelmatig hanteren van de formele taal.

Nu moeten we vastleggen, wat we onder een uitdrukking wensen te verstaan. Om van te voren een misverstand weg te nemen, zou ik willen opmerken, dat men bij uitdrukking niet moet denken aan uitspraak. Een uitdrukking hoeft niet waar of onwaar te zijn. Ook „x geeft een boek aan Karel" is een uitdrukking. We maken nu de volgende afspraak:

1e. als t_1 en t_2 termen zijn, dan is $t_1 = t_2$ een uitdrukking,

2e. als U_1 en U_2 uitdrukkingen zijn, dan zijn ook $(U_1 \vee U_2)$ en $(U_1 \wedge U_2)$ uitdrukkingen,

3e. als U een uitdrukking is, dan is ook $\neg U$ een uitdrukking,

4e. als U een uitdrukking en v een variabele is, dan zijn ook $\forall v\, U$ en $\exists v\, U$ uitdrukkingen.

U en v zijn weer symbolen, die niet tot het formule systeem behoren, maar gebruikt worden bij het praten *over* het systeem.

Volgens 1e worden de elementaire uitdrukkingen van het systeem gevormd. De andere drie leden dienen om met behulp van logische tekens uitgaande van elementaire uitdrukkingen andere, niet-elementaire uitdrukkingen te vormen.

Uitdrukkingen zijn dus:

$1 = 1$, $x = (1 + y)$, $1 = 1 \wedge x = (1 + y)$, $\neg\, 1 = 1$,
$\forall x\, \exists y\, x = (1 + y)$, $\forall z\, 1 = 1$, $\exists x\, (1 = 1 \wedge \neg\, x = (1 + y))$.

Omtrent het gebruik van haakjes kunnen hier analoge opmerkingen gemaakt worden als bij het construeren van termen. Ook hier worden in 2e haakjes altijd geschreven en kan men praktische regels voor het weglaten van haakjes desgewenst opstellen.

Nu moeten we nog uitleggen, wat verstaan wordt onder vrije en onder gebonden variabelen.

Als v een variabele is en U een uitdrukking van de vorm $\forall v\, U'$ of $\exists v\, U'$, dan noemen we de variabele v overal, waar hij in U voorkomt, *gebonden*.

Zo is:

x een gebonden variabele in $\forall x\, \exists y\, x = (1 + y)$,

z een gebonden variabele in $\forall z\, 1 = z$,

x een gebonden variabele in $(\exists x\, x = (x \cdot x) \wedge x = y)$ [1]) alleen in het deel $\exists x\, x = (x \cdot x)$, maar niet in het deel $x = y$, omdat de kwantor $\exists x$ alleen op het eerste deel van de uitdrukking werkt.

Een variabele, die niet gebonden is, is *vrij*.

Een variabele is dus steeds gebonden of vrij op een bepaalde plaats, waar hij in een uitdrukking voorkomt. Het kan zijn, dat een variabele in een uitdrukking op sommige plaatsen gebonden en op andere vrij voorkomt. Dit was het geval met de variabele x in ons laatste voorbeeld.

We kunnen nu de uitdrukkingen in twee soorten verdelen:

1e. uitdrukkingen, waarin geen vrije variabelen voorkomen,

2e. uitdrukkingen, waarin wel vrije variabelen voorkomen.

---

[1]) Dit is conform de regels opgeschreven. Stelt men prijs op duidelijkheid, dan verdient de schrijfwijze $(\exists x \cdot x = x) \wedge x = y$ de voorkeur.

De uitdrukkingen van de eerste soort, waarin dus geen vrije variabelen voorkomen, noemen we *uitspraken*.

Dit is de structuur van een formeel systeem. Men kan de structuur compliceren door meer logische en meer niet-logische symbolen toe te voegen, variabelen van verschillende soorten te onderscheiden (zoals in de planimetrie er verschillende soorten variabelen zijn, die b.v. punten resp. rechte lijnen voorstellen), het aantal regels overeenkomstig uit te breiden, maar daarmee maken we het geheel alleen gecompliceerder en niet principieel anders.

Ons doel was uit te leggen, wat een formeel systeem is, om deze uitleg als springplank te kiezen voor het beantwoorden van vragen aangaande de betekenis van sommige termen, die in de schoolwiskunde gebruikt worden.

Een van onze vragen was: wat is een tweeterm? Of meer algemeen: wat is een *n-term*? Om deze vraag te beantwoorden, behoeven we alleen maar te letten op de regels voor het vormen van termen. We stellen vast:

1e. 1 is een eenterm,

2e. elke variabele is een eenterm,

3e. als t_1 en t_2 termen zijn, dan is $(t_1 \cdot t_2)$ een eenterm,

4e. als t_1 een p-term en t_2 een q-term is, dan is $(t_1 + t_2)$ een $(p + q)$-term.

Misschien vindt u, dat hiermee een open deur is ingetrapt. Formuleert men deze regels echter niet expliciet, dan zijn gemakkelijk misverstanden mogelijk. Zo kan men erom vechten, of $a(b + c) + (d + e)$ een twee-, een drie- of een vierterm is. Sommigen zeggen: het is een tweeterm, want het is de som van $a(b + c)$ en $(d + e)$. Anderen noemen het een drieterm, want de haakjes om $d + e$ mag men ook weglaten. Weer anderen stemmen voor een vierterm, want na wegwerken van alle haakjes staat er $ab + ac + d + e$. Wat levert ons nu onze zojuist opgestelde definitie? We moeten de term officieel eerst schrijven

$$((a \cdot (b + c)) + (d + e)).$$

Hierin is

b een eenterm, c een eenterm,

$(b + c)$ een tweeterm,

$(a \cdot (b + c))$ een eenterm,

d een eenterm, e een eenterm,

$(d + e)$ een tweeterm,

$((a \cdot (b + c)) + (d + e))$ een $(1 + 2)$-term, dus een drieterm. En daarmee is de ruzie beslecht.

Wat is de *graad* van een eenterm? We spreken af:

1e. 1 is van de eerste graad,

2e. elke variabele is van de eerste graad,

3e. is t_1 een eenterm van de p^e en t_2 een eenterm van de q^e graad, dan is $(t_1 \cdot t_2)$ van de $(p + q)^e$ graad.

En als de eenterm nu het produkt is van twee termen, die geen eentermen zijn? Welnu, dan definiëren we eerst de graad van een veelterm. Daartoe stellen we vast, dat de graad van een veelterm, gelijk is aan het maximum van de graden van de eentermen, waarvan hij de som is. Om kort te gaan, men gaat inductief te werk en ieder heeft nu aanwijzingen genoeg om dit zelf tot een goed einde te brengen.

Een ander woord, dat vaak gebezigd wordt en velen tot wanhoop brengt, als het gedefinieerd moet worden, is het woord „*vorm*". Ook wel genoemd „algebraïsche vorm". Welnu, wat is een algebraische vorm? Het antwoord is al heel simpel: het is een term. D.w.z. wat hierboven „term" genoemd is, is precies hetzelfde als datgene, wat men onder „vorm" pleegt te verstaan.

Wat is een *eigenschap*? Ook deze vraag is heel eenvoudig te beantwoorden. Een eigenschap is hetzelfde als een uitdrukking.

Een verzameling wordt dus geschreven:

$$\{v|U\},$$

waarin v een variabele en U een uitdrukking is. Op het eerste gezicht lijkt dit zonderling. We zijn immers gewoon aan het soort verzamelingen, waarbij U een eigenschap is, die „van x afhangt". Dit is een bijzonder geval van ons algemene verzamelingsbegrip. We kunnen namelijk de volgende gevallen onderscheiden:

1e. De variabele v is vrij in U, geen enkele andere variabele is vrij in U. Dit is het normale geval.

2e. De variabele v is niet vrij in U (d.w.z. komt alleen gebonden in U voor of helemaal niet), geen enkele andere variabele is vrij in U. Dan is U een uitspraak. Is deze uitspraak waar, dan is $\{v|U\}$ de alverzameling [1]). Is de uitspraak niet waar, dan is $\{v|U\}$ de lege verzameling.

3e. De variabele v is vrij in U, in U is ook nog een andere variabele w vrij. Dan is $\{v|U\}$ een verzameling, die „afhangt" van de keuze van w. We noemen w dan een *parameter*. Meer algemeen noemen we alle variabelen, die van v verschillen en vrij zijn in U, parameters van de verzameling $\{v|U\}$.

---

[1]) d.w.z. als U gedefinieerd wordt als deelverzameling van V, dan is $U = V$.

4e. De variabele v is niet vrij in U, in U is wel een andere variabele w vrij. Dan is w weer een parameter. De verzameling is voor elke waarde van w hetzij de alverzameling, hetzij de lege verzameling.

Opmerking. Nu zal de aandachtige lezer zeggen, dat ik mezelf verstrikt heb. Ik heb nieuwe symbolen ingevoerd bij het vormen van verzamelingen, t.w. de accoladen en de verticale streep. Daardoor worden nieuwe constructieregels vereist, deze zullen de betekenis van het woord ,,eigenschap'' beïnvloeden, waardoor op zijn beurt de betekenis van ,,verzameling'' beïnvloed wordt, waarmee we in een vicieuze cirkel geraakt zijn. Gelukkig is de situatie niet zo ernstig, als ze lijkt. Nieuwe symbolen kan men ad libitum invoeren, mits het maar schijnbaar nieuwe symbolen zijn, d.w.z. mits ze maar uit elke context weer elimineerbaar zijn. Nu komt het verzamelingssymbool voor in teksten als:

$$3 \in \{x|(2 \cdot x) = (x + 1)\},$$
$$\{x|(2 \cdot x) = (x + 1)\} \subset \{x|(x = 1 \vee x = 2)\}.$$

Men kan de ,,set-builder'' als volgt hieruit elimineren. De eerste uitspraak betekent:

$$(2 \cdot 3) = (3 + 1)$$

en de tweede:

$$\forall x((2 \cdot x) = (x + 1) \Rightarrow (x = 1 \vee x = 2))$$

(waarin $(U_1 \Rightarrow U_2)$ een andere schrijfwijze is voor $(\neg U_1 \vee U_2)$).

Nu zijn de essentiële moeilijkheden wel overwonnen. Een *vergelijking* is een bijzonder geval van een verzameling, namelijk een verzameling van de vorm

$$\{v|t_1 = t_2\},$$

waarin v een variabele en t_1 en t_2 termen zijn.

Relaties en *functies* zijn eveneens bijzondere gevallen van verzamelingen, namelijk verzamelingen van geordende paren.

En nu we weten, wat een parameter van een verzameling is, is het zonder meer ook duidelijk wat een parameter van een vergelijking, van een relatie en van een functie is.

Woorden als ,,toevoeging'' en ,,voorschrift'' zijn vaag. Men kan ze beter niet gebruiken, als men iets goed wil uiteenzetten. Natuurlijk kan men achteraf wel constateren, dan een functie een verzameling geordende paren is met de eigenschap, dat elk element x van een verzameling V in precies één paar als eerste voorkomt. Is nu het tweede element van dat paar y, dan kan men zeggen, dat door de functie y aan x wordt toegevoegd. D.w.z. als men eenmaal weet, wat een functie is, kan men verklaren, wat met de toevoeging bedoeld wordt. Men kan echter niet de toevoeging gebruiken om te verklaren, wat een functie is.

GASPARD MONGE

Op 18 juli 1818, 150 jaar geleden, is Gaspard Monge, de grondlegger der beschrijvende meetkunde, overleden. Op 10 mei 1746 is hij te Beaunes (Bourgondië) geboren. Na eerst nog korte tijd aan een college te Lyon natuurkunde te hebben onderwezen kwam hij aan de militaire school te Mézières. Hij kreeg tot taak om, voor de bouw van fortificaties, door berekening na te gaan hoe deze het beste beveiligd waren tegen vijandelijk geschut. Monge loste dit probleem echter veel eenvoudiger op, door namelijk uit te gaan van een figuur van de horizontale en vertikale projektie. Hiermee was de beschrijvende meetkunde geboren. Wanneer dit precies geweest is, is niet bekend, want ze werd als militair geheim verborgen gehouden. Het zal waarschijnlijk kort voor 1768 geweest zijn, want in dat jaar werd Monge te Mézières hoogleraar in de wiskunde; in 1771 ook nog in de natuurkunde. Vanaf 1780 gaf hij onderwijs te Parijs, waar hij zich in 1783 vestigde als examinator der marine-officieren. Monge stond van meet af aan aan de zijde der revolutie. Op 10 mei 1792 werd hij minister van marine. Hij was lid der commissie, die advies moest geven over de keuze van een nieuwe lengte-eenheid. In 1794—1795 was hij oprichter van de École normale en de beroemde École polytechnique, waar veel bekende 19e-eeuwse Franse wiskundigen opgeleid zijn. In 1798 ging hij met Napoleon naar Egypte. Terug in Frankrijk werd hij senator en als graaf van Péluse in de adelstand verheven. Na Napoleons val werd hij, in 1816, uitgestoten als lid der Académie. Bij zijn begrafenis echter is hem, tegen de wens der Bourbon-regering in, zowel van de zijde der Académie als van de École polytechnique zeer veel eer betoond.

Zijn werk over beschrijvende meetkunde is voor het eerst verschenen als *Géométrie descriptive. Leçons données aux Écoles normales, l'an 3 de la République* (= 1794—1795). *Paris, l'an VII.* Het bestaat uit vier delen: I, snijlijn van vlakken, hoeken; II, raakvlak in een punt van een gebogen oppervlak; III, afstand van kruisende lijnen, raakvlakken door een punt buiten een gebogen oppervlak; IV, snijlijn(en) van gebogen oppervlakken. Het doel der beschrijvende meetkunde geeft Monge aan als: het weergeven van een driedimensionale figuur in een plat vlak door middel van de orthogonale horizontale en vertikale projektie en: het vinden der eigenschappen van zo'n figuur uit de vlakke projektietekening. We merken nog op, dat al eerder, in de bouwkunst, projektietekeningen bruiken van twee onderling loodrechte projektievlakken en deze gebruikt werden; Monge's verdienste echter is het tesamen ge-

methode tot een goed gefundeerde en systematisch uitgewerkte tak der meetkunde te maken.

Naast het vorige dienen nog vermeld te worden zijn *Feuilles d'analyse appliquée à la géometrie à l'usage de l'École polytechnique, publiées la première année de cette école (an 3 de la République), Paris,* een analytische meetkunde der driedimensionale ruimte. Het werk bevat veel meetkundige interpretaties uit de leer der differentiaalvergelijkingen en ook onderwerpen, die men thans tot de differentiaalmeetkunde rekent. De laatste paragrafen ervan zijn een heruitgave van zijn al uit 1771 daterende *Mémoire sur les développées, les rayons de courbure et les différents genres d'inflexion des courbes à double courbure.*

Monge was voor alles meetkundige en als zodanig een der eerste specialisten in de geschiedenis der wiskunde. Hij schijnt een buitengewoon ruimtelijk voorstellingsvermogen te hebben gehad. Hij was ook de eerste, die ruimtelijke modellen vervaardigde; deze zijn verloren gegaan.

A. J. E. M. Smeur.

MODERNISERING LEERPLAN WISKUNDE

Antwoord aan Prof. dr. N. G. DE BRUYN [1])

door

Prof. dr. H. FREUDENTHAL
Utrecht

1. Tussen de twee oorlogen enquêteerde iemand het bedrijfsleven ten behoeve van het rekenonderwijs. De wensen gingen naar rekenvaardigheid uit. Nauwelijks een der geënquêteerden dacht er aan dat het rekenen ergens voor diende en dat het er in eerste instantie op aankwam te leren wat je met het rekenen kunt bereiken. Onder de wensen kwam onder meer voor: de tafels tot twintig. Aan wie het niet weet, vertel ik er bij, dat er in die tijd al rekenmachines bestonden, zelfs elektrische. Het bedrijfsleven vond toen blijkbaar nog menselijke rekenmachines goedkoper. Dit is veranderd. Als men dezelfde bedrijven vandaag zou enquêteren, zou het advies vermoedelijk zijn: het hoofdrekenen en cijferen afschaffen, immers daar hebben we machines voor. Voor de wiskunde daarentegen koestert men daar een eerbied die wiskundigen soms doet schrikken. De

---

1) Euclides, **43**, mei 1968, blz. 260.

eisen t.a.v. het wiskunde-onderwijs zouden bij zulk een enquête wel alle perken te buiten gaan.

2. Ik heb van begin af aan de kwestie van nieuwe leerstof als secundair beschouwd. Moderne programma's moeten m.i. allereerst dienen om het onderwijs methodisch en didactisch te verbeteren. Kan men dit niet verwezenlijken, dan zijn de nieuwe programma's erger dan de oude. Ik heb de indruk dat men in Nederland met voldoende beleid is gaan en gaat moderniseren, om op dit punt werkelijk successen te behalen.

3. Het is een andere kwestie of de leerlingen thans wiskunde zo zullen leren dat ze haar kunnen toepassen. Ik ben in dit opzicht even pessimistisch als Prof. de Bruyn. Alleen ben ik dit om geheel andere redenen. Ik geloof namelijk niet dat er enig programma bestaat dat zijn toepasbaarheid garandeert. Toegepaste wiskunde is de minst toepasbare, omdat zij de grootste deugd van de wiskunde, de flexibiliteit, mist. Als het onze bedoeling is, de leerling met een wiskunde vertrouwd te maken, die hij kan toepassen, dan moeten we ons niet op de programma's blind staren. Ik zie noch in Nederland noch elders veel tekenen van inzicht in hetgeen moet geschieden om toepasbare wiskunde èn het toepassen van de wiskunde te onderwijzen. Er zal veel moeten geschieden eer zulk een inzicht kan groeien.

4. Ik sta uiterst aarzelend t.a.v. waarschijnlijkheid en statistiek op school. Mocht het worden ingevoerd, dan in elk geval niet als schriftelijk examenvak. Waarschijnlijkheid en statistiek is de mooiste gelegenheid om wiskunde te leren toepassen. Het is echter ook het vak om het ergste te worden verknoeid. (Het vraagstuk met 7 rode en 3 groene knikkers wordt door de leraar voorgedaan, en de leerlingen doen het na met 12 blauwe en 5 gele knikkers enz., het hele spectrum door), om bij drie en vier kleuren de leraar weer te laten ingrijpen.) Of het ook anders kan? Men heeft ermee geëxperimenteerd. Misschien lukt het op den duur. Het tegenwoordige rekenonderwijs is immers ook het resultaat van eeuwen experimenteren.

5. Met computer-wiskunde is men op school nog nauwelijks begonnen. Ik denk, dat in Nederland in de volgende cursus de eerste proef begint. Het zou voorbarig zijn geweest om zulk een onderwerp anders dan als keuze-onderwerp in het rapport op te nemen.

6. Maar dit is niet mijn eigenlijke bezwaar tegen Prof. de Bruyn's visie. Nieuwe programma's zijn geen wondermiddel. Er de nadruk op leggen kan betekenen dat men afleidt van waar het bij het onderwijzen van toepasbare wiskunde op aankomt.

EINDEXAMENOPGAVEN IN DE STAD HAMBURG

Denemarken en de Stad Hamburg zijn de eerste geweest, die een nieuw wiskundeprogramma voor het middelbaar onderwijs verplicht hebben gesteld. Hieronder volgen enige opgaven gegeven op het eindexamen der gymnasia in de Stad Hamburg in 1966. De leraren stellen zelf hun opgaven samen en hebben een tamelijk grote vrijheid bij de keuze van hun stof. Dit verklaart het gespecialiseerde karakter, dat verschillende van de opgaven hebben. De examinandi krijgen 3 of 4 opgaven en hebben $5\frac{1}{2}$ uur tijd om deze te maken.

De opgaven zijn ons toegezonden door Drs. J. van Dormolen.

1) Durch $f(x) = x - 3$ für alle $x \in [0,6[$,
$f(6) = 0$
werde eine Funktion f erklärt.
Beweise, daß f in $[0,6]$ integrierbar ist und berechne $\int_0^6 f(x)dx$!

2) Untersuche die Abbildung

$$z' = \frac{iz + 1}{z + i}$$

der Gauß-Ebene auf sich! Dabei soll mindestens die Einteilung der Ebene in Teilmengen durch x-Achse, y-Achse, Einheitskreis und das Bild dieser Einteilung beschrieben werden. Weitere Eigenschaften nach eigener Wahl! Die Ergebnisse sollen durch Zeichnungen erläutert werden.

3) Im 5-dimensionalen Raum R^5 sei E_1 die durch
$x_3 = x_4 = x_5 = 0$ beschriebene Ebene, E_2 die durch die Punkte
$P_1 = (1/1/1/1/1)$, $P_2 = (0/2/1/2/1)$,
$P_3 = (2/3/2/3/-1)$ aufgespannte Ebene.
Zeige: E_1 und E_2 besitzen genau ein gemeinsames Lot AB.
Berechne AB! (A,B Punkte mit $A \in E_1$, $B \in E_2$).

4) Bestimmen Sie den größten gemeinsamen Teiler aller natürlichen Zahlen

$$a_n = 5^n - 4n - 1 \qquad \text{für } n \in N,\ n \geqq 2.$$

5) Sei $f_1 : x \to x - 2$ und $f_2 : x \to \ln x$.
   a) Beweisen Sie, daß die Graphen von f_1 und f_2 genau zwei Schnittpunkte besitzen.
   b) Berechnen Sie die Schnittstellen auf zwei Dezimalen nach dem Komma genau. (Zeichnung!)
   c) Bestimmen Sie den Inhalt der Punktmenge
   $M = \{(x, y) | 1 \leqq x \leqq 3 \wedge y \geqq x - 2 \wedge y \leqq \ln x\}$.

6) a) Stellen Sie den vollständigen Gruppengraphen von $\mathfrak{K}^{\times}_{15}$, d.h. von der multiplikativen primen Restklassengruppe modulo 15 auf.
   b) Geben Sie ein Erzeugendensystem und die definierenden Relationen an.
   c) Welche der Untergruppen von $\mathfrak{K}^{\times}_{15}$ sind zueinander isomorph? Geben Sie jeweils einen Isomorphismus an.

7) Eine Funktion sei abschnittsweise definiert durch
   $y = f(x) = a - bx^2$ für $x < 2$
   $\quad = -2x + 4$ für $x \geqq 2$.
   Bestimme a und b so, daß diese Funktion für $x = +2$ stetig und differenzierbar ist.

8) Dehne die Koordinatenebene in Richtung der x-Achse auf das Doppelte und stauche sie gleichzeitig in Richtung der y-Achse auf die Hälfte. Der Koordinatenanfangspunkt soll dabei in Ruhe bleiben. — Durch diese Vorschrift wird die Koordinatenebene auf sich selbst abgebildet.
   a) Gib die Abbildungsgleichungen an.
   b) Zeichne zum Originaldreieck $O(0/0)$, $A(2/4)$, $B(1/6)$ das zugehörige Bilddreieck und vergleiche die Flächeninhalte.
   c) In welchem Verhältnis steht der Flächeninhalt eines beliebigen Dreiecks zu dem seines Bilddreiecks?
   d) Weise nach, daß die gegebene Abbildung aus Geraden wiederum Geraden macht.
   e) Auf welchen Ortlinien liegen alle Punkte, deren Entfernung vom Ursprung bei der Abbildung erhalten bleibt?

9) a) Untersuche und zeichne $y = \dfrac{32x}{(x^2 + 3)^2}$.
   b) Berechne im ersten Quadranten die Fläche, die begrenzt wird von der Kurve, der x-Achse und der Ordinate in $x = a$ $(a > 0)$.
   c) Wie ändert sich der in b. berechnete Flächeninhalt, wenn a über alle Grenzen wächst?

10) Das Produkt $1.2.3.4.\ldots.n$ bezeichnet man mit dem Zeichen $n!$
Es gilt $1! = 1$; $2! = 2$; $3! = 6$; $4! = 24$; $5! = 120$ u.s.w.
Berechne die Summe
$S_n = 1.1! + 2.2! + 3.3! + \ldots + n.n!$
Anleitung zur Lösung:
a) Berechne zunächst die Summen S_1, S_2, S_3, S_4 und vergleiche die Ergebnisse mit den oben berechneten Werten für $1!$ bis $5!$.
b) Stelle eine Vermutung auf für den allgemeinen Ausdruck der Summe S_n.
c) Berechne S_5 und S_6 und überprüfe die Vermutung für diese Sonderfälle.
d) Beweise die Vermutung durch vollständige Induktion für alle natürlichen Zahlen n.
In der Ausführung des Beweises ist der Text so zu gestalten, daß aus der Durchführung dieses Beweises das allgemeine Beweisverfahren der Methode der vollständigen Induktion deutlich wird.

11) Gegeben sei die Menge der Elemente (a,b) mit $a, b \in \mathrm{N}$. Es sei definiert: $(a_1,a_2) = (b_1, b_2) \Leftrightarrow a_1 + b_2 = a_2 + b_1$.
a) Kann man mit dieser Relation die Menge in durchschnittsfremde Untermengen (Klassen) einteilen, indem man gleiche Elemente als zur gleichen Klasse gehörend ansieht?
b) Ferner sei definiert: $(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$
$(a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) = (a_1b_2 + a_2b_1, a_1b_1 + a_2b_2)$
Hat die Menge der (a, b) in bezug auf beide Verknüpfungen Gruppeneigenschaft? Ist sie Ring, Integritätsbereich oder sogar Körper mit diesen Verknüpfungen?
Sollten sich bei einer Rechnung die Komponenten als Zahlen erweisen, die nicht in N liegen, so versuche, das entsprechende Element durch ein gleichwertiges „erlaubtes" mit Komponenten aus N zu ersetzen mit Hilfe der Gleichheitsdefinition!

12) Beweise die Additionsregel für zwei vereinbare Ereignisse:
$w(A \cup B) = w(A) + w(B) - w(A \cap B)$ mit $A \cap B \neq \emptyset$
als Verallgemeinerung der Regel für unvereinbare Ereignisse mit $A \cap B = \emptyset$. Benutze dazu z.B. bekannte Operationen aus der Mengenalgebra.
Wende die Regel auf folgenden Fall an: Ein Abiturient nimmt die Wahrscheinlichkeit, in Physik mit „gut" zu bestehen, für

sich mit 40 % an. Die Wahrscheinlichkeit, mindestens in Physik oder Mathematik „gut" zu erhalten, glaubt er mit 60 % abschätzen zu können. Die Chance, das Ergebnis in beiden Fächern zu erreichen, hält er aber nur für zehnprozentig. Welche Wahrscheinlichkeit billigt er sich zu, in Mathematik mit „gut" abzuschneiden?
Erläutere auch den Zusammenhang zwischen der Symbolik in der Regel und den Begriffen im angegebenen Beispiel!

13) Man gebe sämtliche Lösungen der Gleichung $z^{12} = 1$ im Körper der komplexen Zahlen an und stelle sie in der Gaußschen Zahlenebene dar.
Man zeige, daß die Menge M aller Lösungen bei der Multiplikation als Verknüpfung eine zyklische Gruppe bildet. Welche Elemente von M sind Erzeugende? Man gebe sämtliche Untergruppen von M an. In welcher Beziehung stehen die Ordnungen der Untergruppen zu der Ordnung von M? Warum kann ein erzeugendes Element von M nicht in einer echten Untergruppe von M vorkommen?

14) Man zeige mit Hilfe von Matrizen, dasz das homogene Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + bx_2 - x_3 &= 0 \\ -x_1 + x_2 + bx_3 &= 0 \\ bx_1 - x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

dann und nur dann den Nullvektor als Lösungsvektor hat, wenn $b \neq 0$ gilt.

WIMECOS

De penningmeester van Wimecos maakt de leden er op attent, dat het nu reeds mogelijk is hun contributie voor het verenigingsjaar 1968-1969 ten bedrage van f 9.— (inclusief abonnement op Euclides) te storten of over te schrijven op postrekening 143917 ten name van Wimecos, Amsterdam. Leden die Euclides op andere wijze ontvangen betalen een contributie van f 3.50.

INHOUDSOVERZICHT

Bij dit nummer wordt aan alle abonees het inhoudsoverzicht van het 4e tiental jaargangen verzonden. De samensteller ervan is Dr. J. H. Wansink.

INTERNATIONALES KOLLOQUIUM IN UTRECHT ÜBER MODERNEN MATHEMATISCHEN UNTERRICHT AN DER HÖHEREN SCHULE

In vielen Ländern wird gegenwärtig an einer Modernisierung des mathematischen Unterrichts gearbeitet, wobei man sich über gewisse Punkte einig ist: die schlagwortartig durch „Mengen, Abbildungen, Strukturen" gekennzeichnete heutige mathematische Auffassungsweise soll im Unterricht Berücksichtigung finden derart, daß zugleich die Elementarmathematik der Schule einheitlicher, einsichtiger und bildungswirksamer organisiert wird und neue Anwendungsmöglichkeiten der Mathematik in Erscheinung treten. In der konkreten Interpretation dieser Aufgabe, in der Erkenntnis und Berücksichtigung der mit ihr verbundenen didaktischen, methodischen und pädagogischen Möglichkeiten und Aufgaben, in der Reichweite der Zielsetzungen und ihrer Begründung sowie in der Art der Durchführung bestehen jedoch erhebliche Unterschiede, die nicht zuletzt durch die Struktur des jeweiligen Schulsystems und die Schul- und Unterrichtstradition des betreffenden Landes bedingt sind. Ein Erfahrungsaustausch und Diskussionen zwischen Vertretern verschiedener Ländern sind deshalb um so wünschenswerter. Sie zu ermöglichen ist eine der Angelegenheiten der Internationalen Mathematischen Unterrichtskommission, die vom 19. bis 23. Dezember 1964 auf Initiative der niederländischen Unterkommission ein internationales Kolloquium in Utrecht abhielt. Die Leitung hatte Professor Dr. H. Freudenthal.

Über die Versuche in Holland zur Weiterbildung und Vorbereitung der Lehrer für einen modernen Unterricht, über neue holländische Lehrpläne und Lehrbücher berichteten H. Freudenthal (Utrecht), R. Troelstra (Hilversum), L. R. J. Westermann (Groningen), J. van Lint (Zwolle) und Th. J. Korthagen (Zutphen).

Als Vertreter des belgischen Reformprogramms sprach W. Servais (Morlanwelz) über den für den mathematisch-naturwissenschaftlichen Zweig der höheren Schulen angestrebten Lehrplan, wie er im einzelnen in der neuen OECD-Schrift „*Mathematics to-day*" abgedrückt ist. St. Straszewicz (Warschau) gab einen Bericht über den stofflichen Aufbau des für den polnischen Schulen neu ausgearbeiteten Mathematiklehrplans. Wie aufmerksam in Polen

die didaktischen Einzelprobleme untersucht werden, zeigte der (in französischer Sprache gehaltene) Vortrag von Frau Zofia Krygowska (Krakau) mit dem Thema: „*Die Elemente der Logik und die Methodologie der Mathematik im mathematischen Unterricht*". Versuche in der Schweiz „mathematische Laboratorien" in den Schulen einzurichten, vergleichbar mit unseren Arbeitsgemeinschaften, in mancher Hinsicht jedoch weitergehend, waren der Gegenstand eines Vortrags von A. Delessert (Riex). Mlle Lucienne Felix (Paris) sprach über das Gleichgewicht zwischen einem „Modernen" und einen „verbesserten traditionellen" Unterricht. Als führende Mathematikpädagogin Italiens stellte Mlle Emma Catselnuovo (Rom) ihre Auffassingen und Erfahrungen zu einem modernen Mathematikunterricht auf der Unterstufe der höheren Schule dar.

Aus den Vereinigten Staaten war M. Beberman (Urbana), der Leiter des University of Illinois Committee on School Mathematics (UICSM) anwesend. Er sprach über neue Versuche im Rahmen dieses in vielen amerikanischen Schulen erprobten Programms. Nach langer vorsichtiger Zurückhaltung hat auch Großbrittanien eine beachtliche Aktivität in der Modernisiering des mathematischen Unterrichts entwickelt. Über die Arbeit des aus privaten Mitteln getragenen School Mathematics Project berichteten W. O. Storer (Birmingham) und der Leiter dieses Projekts, B. Thwaites (Southampton). Einen die gesamten Modernisierungsbestrebungen kritisch beleuchtenden Vortrag (in englischer Sprache) hielt A. Wittenberg (Toronto) unter dem Thema: *Vorrangigkeiten* und *Verantwortlichkeit in der Reform der mathematischen Bildung*.

Erfahrungsberichte aus der konkreten Reformarbeit in der Bundesrepublik gaben J. Dzewas (Ahrensburg) und H. G. Steiner (Münster). Sie sprachen zum Thema „*Versuche zu einer modernen Gestaltung des Analysisunterrichts in der Oberstufe des Gymnasiums*" bzw. über "*Gruppen, Ringe, Körper im Unterricht der Oberstufe des Gymnasiums*". Das Schlußwort zur Tagung hatte *A. F. Monna* (Utrecht).

Den Vorträgen folgten lebhafte Diskussionen, die häufig im kleinen Kreis bis in den Nachtstunden fortgesetzt wurden. Eine nachmittägliche Ausfahrt fürte in die Hohe Veluwe und gab Gelegenheit zum Besuch des Kröller-Müller-Museums.

H. G. Steiner

Overgenomen uit de MATHEMATISCH-PHYSIKALISCHE SEMESTERBERICHTE, Neue Folge, Band XII, Heft 1; Göttingen, 1965, p. 127—128.

WISKUNDE IN DE LEERLINGENBIBLIOTHEEK III

door

D. LEUJES

Delft

Op verzoek van de redactie volgt hieronder een aanvulling op de publikatie in Euclides, 36e jrg., nr. VII, blz. 241. Met nadruk is destijds gesteld, dat de bedoeling van deze lijsten alleen is, de docenten te informeren over wat er op dit gebied is verschenen.

Mijn eigen ervaring is, dat de buitenlandse boeken weinig of niet gelezen worden. Intussen zijn er vrij veel boeken in het Nederlands verschenen, zoals men in onderstaande opsomming kan zien. Of ze geschikt zijn? Men oordele zelf!

Adler, Irving	The Giant Colour Book of Mathematics (Paul Hamlyn, London, 1960)
Adler, Irving	The new mathematics (A Mentor Book, 1960)
Adler, Irving	Nieuwe wiskunde (Prisma 1152, 1966)
Adler, Irving	Waarschijnlijkheidsrekening en statistiek (Aula 295, 1966)
Bergamini, David & Redactie van Life	Wiskunde (Parool/Life Wetenschapserie, 1965)
Bochenski, I. M.	Die zeitgenössischen Denkmethoden (Dapl. Taschenbücher 304, 1959)
Bouqué, E.	De algebra der verzamelingen en relaties (Story's wiskundige monografieën, deel I, 1967)
Burger, D.	Bol-land (Blommendaal, Den Haag, 1957)
Burger, D.	Silvestergespräche eines Sechsecks (vertaling door Klaus Wigand van Bol-land; Aulis Verlag)
Court, N.A.	Mathematics in fun and in earnest (A Mentor Book, 1958)
Coxeter, H. S. M.	Unvergängliche Geometrie (vertaling uit het Engels door J. J. Burckhardt; Birkhäuser Verlag, 1962)
Dijksterhuis, E. J. & W. v. d. Wielen	Vreemde woorden in de wiskunde (Noordhoff, 2e druk, 1948)
Euwe, M.	Inleiding tot computer en automatisering (Samson, 1967)
Freudenthal, H.	Van sterren tot inlegzolen (Van Loghum-Slaterus, Arnhem, 1954)

Freudenthal, H.	Waarschijnlijkheid en statistiek (Bohn, Haarlem, 1957)
Freudenthal, H.	Exacte Logica (Bohn, Haarlem, 1961)
Freudenthal, H.	Wiskunde in wetenschap en dagelijks leven (Wereldakademie, De Haan/Meulenhoff, 1967)
Goodstein, R. L.	Grondbegrippen van de wiskunde (Aula 271, 1966)
Hoeven, J. H. v. d.	Planimetrie (Prisma-Compendium 10, 1964)
Huff, Darrell	Gebruik en misbruik van de statistiek (Prisma 572, 1960)
Huff, Darrell	Bereken uw kansen (Prisma 1096, 1965)
Hunter, J. A. H.	Rekenkundige raadsels (Prisma 637, 1961)
Jacoby, Oswald & W. H. Benson	Wiskunde voor je plezier (Prisma 1256, 1967)
Jevons, W. S.	Logica (Prisma-Conpendium 33, 1966)
Kaufmann, A. & R. Faure	Operationele Research (Marka 17, 1965)
Kramer, Edna E.	Wiskunde; mogelijkheden voor de moderne wetenschappen (Aula 177, 1964)
Leujes, D.	Complexe getallen (Noorduyn, Gorinchem, 1967)
Lietzmannn, W.	Lustiges und Merkwürdiges von Zahlen und Formen (9. Auflage, 1961)
Lietzmann, W.	Wo steckt der Fehler? (Teubner, Stuttgart, 4. Aufl., 1962)
Liket, Th. M. E.	Differentiaal- en integraalrekening (Prisma-Compendium 16, 1965)
Linden, C. v. d.	Goniometrie en trigonometrie (Prisma-Compendium 5, 1964)
Linden, C. v. d.	Analytische meetkunde (Prisma-Compendium 7, 1964)
Linden, C. v. d.	Moderne wiskunde (Prisma 1248, 1967)
Menninger, K.	Wij en de wiskunde (Bibl. voor algemene ontwikkeling, 1963)
Meschkowski, H.	Wandlungen des mathematischen Denkens (Vieweg, 1962)
Meyer, Jerome S.	Wiskundige capriolen (Prisma 827, 1963)
Moroney, M. J.	Facts from figures (A Pelican Book, 1954)
Moroney, R. M. e.a.	Inleiding tot de waarschijnlijkheidsleer (Aula 328)
Newton Friend, J.	Rekenkronkels (Prisma 1169, 1966)

Newton Friend, J.	Zin en onzin met getallen (Prisma 1200, 1966)
Nothing All	Inzicht in de vierde dimensie (Noordhoff)
Ogilvy, G.	De wiskunde van morgen (Aula 185, 1965)
Oort, D. W. & G. H. Meyer	Algemene rekenkunde (Prisma-Compendium 3, 1964)
Papy	Moderne wiskunde, deel I en II (Marcel Didier, Brussel, 1965, 1967)
Pedoe, Dan	De speelse wiskunde (Aula 282, 1966)
Péter Rósza	Wiskunde spelenderwijs (Prisma 1203, 1966)
Pierce, J. R.	Symbolen en signalen (Aula 275, 1966)
Polya, G.	Mathematical discovery (2 delen)
Reid, C.	Van nul tot oneindig (Prisma 1067 1965)
Roodenburg, S.	Wiskunde (Elseviers repertoria 6, 1964)
Ruth, W. G. J. van	Stereometrie (Prisma-Compendium 14, 1965)
Sawyer, W. W.	Wegwijs in de wiskunde (Aula 104, 1962)
Schuh, F.	Hoe bepaal ik mijn kans? (Agonbibl. 4, 1963)
Steinbuch, Karl	Menselijk en machinaal denken (Aula 148, 1964)
Struik, D. J.	Geschiedenis van de wiskunde (Aula 195, 1965)
Teller, Otto	Vademecum van de wiskunde (Prisma 1033, 1964)
Tietze, H.	Opgeloste en niet opgeloste Problemen uit de Wiskunde (Thieme, 1961)
Tietze, H.	Nog meer opgeloste en niet opgeloste Problemen uit de Wiskunde 2 (Thieme, 1963)
Timmerding, H. E.	Der goldene Schnitt (Math. Phys. Bibl. 32, 1925)
Tocquet, Robert	Toveren met getallen (Prisma 786, 1962)
Vredenduin P. G. J.	85 wiskundige puzzles (met oplossingen) (Noordhoff, 1964)
Vredenduin, P. G. J.	Verzamelingen (Wolters, Torusreeks I, 1967)
Weyl, W.	Symmetry (Princeton University Press)
Whitehead, A. N.	Wiskunde, basis van het exacte denken (Aula 226, 1965)

Whitrow, G. J.	Het tijdsbegrip in de moderne wetenschap (Aula 208)
Wiskundige tafels	(Prisma 1267)
Witter, George E.	Wiskunde (Prisma-Compendium 45)
Wijvekate, M. L.	Verklarende statistiek (Aula 39, 1960)
Yaglom, I. M.	Geometric transformations (New mathematical Library, 1962)

CURSUSSEN MODERNE WISKUNDE VOOR LERAREN

Aan de directeuren en rectoren van vhmo- en kweekscholen is door de Staatssecretaris van onderwijs en wetenschappen de volgende brief (R.A.i.A.D., no 2587/U) toegezonden:

,,De Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde heeft mij voorgesteld in het cursusjaar 1968/1969 nogmaals een cursus in moderne wiskunde te organiseren voor leraren met een eerstegraads bevoegdheid. Daar ik ervan overtuigd ben, dat deze inmiddels reeds enige malen gehouden cursussen van grote waarde zijn voor het onderwijs in de wiskunde, verenig ik mij wederom gaarne met dit voorstel.
De deelneming is kosteloos: reis- en verblijfkosten komen voor rijksrekening.
Ik verzoek U de leraren, die willen deelnemen, hiertoe in de gelegenheid te stellen.
Ik keur goed, dat U hiervoor buitengewoon verlof verleent. Voor verdere bijzonderheden verwijs ik U naar de hierbij gevoegde circulaire van de Commissie.

Ik verzoek U de inhoud van deze brief en de bijgaande circulaire ter kennis te brengen van de aan Uw school verbonden bevoegde leraren in de wiskunde".

De in de brief genoemde circulaire - van de secretaris van de Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde Prof. Dr. A. F. Monna - heeft de volgende tekst:

,,Blijkens zijn brief van heden 17 mei 1968 heeft de Staatssecretaris van Onderwijs en Wetenschappen de Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde wederom belast met de organisatie van een cursus in de wiskunde voor leraren wiskunde met een eerstegraads bevoegdheid. De Commissie deelt U dienaangaande het volgende mede.

De cursussen hebben een ander karakter dan voorgaande jaren, en zijn van kortere duur.

Het onderwerp zal zijn: Achtergronden van het nieuwe leerplan.

Elke cursus zal bestaan uit één of twee series voordrachten door een hoogleraar, waarbij een onderwerp uit het nieuwe (of een mogelijk toekomstig) leerplan van de wetenschappelijke kant benaderd wordt en een praktikum dat deze maal niet zal bestaan uit het maken van vraagstukken, maar uit het groepsgewijs uitwerken van opdrachten over de vraag op welke wijze de in de colleges genoemde onderwerpen hun plaats in de school zullen moeten vinden.

De navolgende cursussen zullen worden gehouden: (zie Tabel 1)

Bij de brief aan de rektoren en direkteuren zijn drie aanmeldingsformulieren gevoegd met betrekking tot de cursus. Meerdere exemplaren zijn verkrijgbaar bij het secretariaat der Commissie, Universiteitscentrum De Uithof, Budapestlaan, te Utrecht.

Tabel 1.

Plaats:	data:	onder leiding van:	titel
1. Groningen	26, 27, 28 september 1968	Prof. Dr. J.C.H. Gerretsen	Het reële getal
2. Groningen	6, 7, 8 januari 1969	idem	idem
(de cursussen no. 1 en 2 zijn identiek, dus geen vervolg-cursus).			
3. Eindhoven	12, 13, 14 september 1968	Prof.Dr. N.G. de Bruyn	Computerwiskunde
4. Eindhoven	9, 10, 11 januari 1969	Prof. Dr. J. Th. Runnenburg	Statistiek en waarschijnlijkheidsleer
5. Utrecht	23, 24, 25 september 1968	Prof.Dr. W.F. van Est Prof.Dr.F.van der Blij	Meetkunde Algebra
6. Utrecht	31 oktober, 1, 2 november 1968	Prof. Dr. H. Freudenthal	Logica en verzamelingen

De aandacht zij er op gevestigd dat ieder, die wil deelnemen, een formulier behoort in te zenden, ook zij die al eerder aan cursussen deelnamen.

Tevens dient te worden vermeld dat het aantal deelnemers per cursus aan een maximum gebonden is van 100.

De formulieren voor deelname moeten vóór 15 juni 1968 aan het Secretariaat worden toegestuurd".

BOEKBESPREKING

E. Bouqué, *De algebra der verzamelingen en relaties*, Story's wiskundige monografieën, deel 1, Gent, 1967, 104 blz., F 180.

Een uitstekend hulpmiddel bij de heroriëntering van wiskundeleraren is het schrijven van monografieën over onderwerpen, die belangrijk zijn voor de docent, die het nieuwe programma zal moeten volgen. In België is men begonnen met het uitgeven van een dergelijke serie. Het eerste deel is thans gereed. In voorbereiding zijn delen over Boole'se algebra's, Kardinaalgetallen en Algebraïsche structuren.

Etienne Bouqué is een jonge Belgische leraar, die zich met hart en ziel inzet voor de vernieuwing van het onderwijs in zijn land. Dat hij jong is, brengt een groot voordeel met zich mee. Hij is met deze nieuwe stof opgegroeid en men kan uit zijn boek dan ook zien, dat hij deze met groot gemak hanteert.

Het boek is verdeeld in drie hoofdstukken. Het eerste is getiteld „naïeve verzamelingenleer". Met „naïef" is hier bedoeld, dat de fundering niet strenger gehouden is dan voor de leraar nodig is, die de stof straks moet behandelen. Men vindt hier inderdaad alles, wat men weten moet in kort bestek samengevat en aan voorbeelden verduidelijkt.

Het tweede hoofdstuk, dat gaat over relaties en functies, is een knap stuk werk. Men vindt de fundamentele eigenschappen van relaties en functies in het algemeen samengevat op een zo beknopte en toch heldere manier, dat het respect afdwingt.

Het derde hoofdstuk is een voortzetting van het tweede. Hier worden in het bijzonder behandeld de binaire relaties van een verzameling A naar A. Men vindt uiteengezet, wat reflexieve, symmetrische, transitieve relaties zijn, wat het belang is van ekwivalentierelaties, wat anti-symmetrische relaties zijn en wat de kenmerken zijn van verschillende ordeningen.

Vaak hoort men: noem nu eens een boekje, waarin ik de beginselen van de moderne wiskunde op beknopte wijze samengevat kan vinden. Welnu, voorzover het de stof betreft, die we in de onderbouw zullen moeten doceren, heeft u hier een dergelijk boek. Ik kan iedere leraar dan ook warm aanbevelen er kennis van te nemen.

P. G. J. Vredenduin

W. S. Dorn, H. J. Greenberg, *Mathematics and Computing* with Fortran programming, John Wiley and Sons, London, 1967, 590 blz., prijs 68/-.

Dit boek is geschreven voor studenten, die een bescheiden vooropleiding in de elementaire wiskunde achter de rug hebben en dient als begeleidend leerboek voor een éénjarige cursus om in staat te zijn wiskundige problemen op te lossen volgens methoden, die geschikt zijn voor de bij deze cursus voorhanden zijnde rekenmachine.

De grootste nadruk valt dus op de praktijk. Aan de hand van de oplossingsmethode van Gausz, toegepast op drie vergelijkingen met drie onbekenden, wordt de matrix van het stelsel geleidelijk omgezet in de driehoeksvorm (bij de opgaven later gaat men tot de diagonaalvorm). Elke eliminatiestap wordt in blokdiagram gevat, daarna worden verschillende stappen met ,,loops" verenigd, zodat tenslotte het hele eliminatieproces in een efficiënt blokdiagram is vervat. Daarna wordt direct dit blokdiagram in machinetaal omgezet. De Fortran-taal wordt echter met zodanige verboden uitgebreid, dat verschillende typen van computers gebruikt kunnen worden.

Tevens wordt aandacht besteed aan de gevolgen van fouten in de coëfficiënten toegelicht met frappante voorbeelden en aan fouten tengevolge van afrondingen gedurende het proces.

Ook optimaliseringsproblemen worden besproken volgens de ,,rondedans" methode of Simplexmethode van G. B. Dantzig, waarna ook nu weer het blokdiagram wordt vertaald voor de machine.

Men zou deze eerste 150 bladzijden als een inleiding kunnen beschouwen, want nu pas wordt het rekenproces in de machine zelf en de toelaatbare Fortrantaal besproken.

Daarna komen andere problemen aan bod, het berekenen van afgeleiden, het verwerven van gegevens voor grafieken, het bepalen van wortels uit getallen, waarbij de iteratiemethode aan de hand van grafieken wordt bestudeerd en de snelst convergerende opzet wordt nagegaan.

Hoofdstuk 8 bespreekt serie- en parallelschakelingen in elektrische circuits. Door combinaties worden nu 18 axioma's voor een boole-algebra afgeleid. Ook het zgn. two-switch en three-switch circuit wordt behandeld.

In een appendix van 50 bladzijden vindt men de meeste antwoorden op de in de tekst opgenomen vraagstukken.

Al met al een boek, dat zeker de belangstelling waard is voor leerlingen van scholen, waar men de logaritmentafel kan afdanken omdat een rekenmachine beschikbaar is.

Burgers

F. Bouman, ir. W. Geerts, dr. D. J. Lock, J. Onderstal; *Algebra*, een geprogrammeerde cursus voor het VHMO, in opdracht van de Stichting Onderwijs Oriëntatie uitgegeven door Meulenhoff, Muuses, Noordhoff, Nijgh en Van Ditmar, Spruyt, Van Mantgem en De Does, Thieme; 1967.

Van deze indrukwekkende leergang zijn op het ogenblik vijf delen verschenen. Er ontbreken nog twee delen en als die voltooid zijn, dan is de onderbouwstof voor het V.W.O. volledig behandeld. Er is een parallel-leergang in voorbereiding voor de H.A.V.O.- en M.A.V.O.-leerlingen.

In een voorlopige recensie van het eerste deel heb ik me indertijd vrij sceptisch getoond. Nu ik kennis heb kunnen nemen van de andere delen moet ik mijn terughoudendheid laten varen.

Het is onmiskenbaar waar dat de vernieuwingen, die zich aan het voltrekken zijn in ons onderwijs, een soort drie-eenheid zullen moeten vormen. Naast de nieuwe bouw van de schoolstructuur en het langverwacht nieuwe leerplan zal ook een nieuwe didactiek moeten groeien. Ik ben er nog niet van overtuigd dat die nieuwe didactiek gevonden zal moeten worden in de techniek van het geprogrammeerde onderwijs. Maar deze nieuwe leergang toont op overtuigende wijze aan, dat dit op zijn minst gezegd tot de mogelijkheden behoort.

Het heeft weinig zin om een gedetailleerd verslag over de produktie van het schrijversteam uit te brengen. Hoe indringend zulk een verslag ook kan zijn, het blijft tweedehands. Vruchtbaarder zal zijn *zelf* door te dringen in deze materie; en dat raad ik elke collega met klem aan. Ik weet wel dat velen onder u over een drempel heen moeten stappen voor zich in de geprogrammeerde instructie te kunnen verdiepen. Ik ken dat van mezelf. Wellicht kan ik u overhalen tot de studie met de mededeling dat ik er (onder andere) uit leerde dat deze geprogrammeerde cursus de klassikale lessen beslist niet overbodig maakt maar ze integendeel openstelt voor een grondige en zeker heilzame vernieuwing.

A. van Tooren

Dr. G. R. Veldkamp, Aanvulling op „*Het examen wiskunde m.o. A*". P. Noordhoff n.v., Groningen, 1967, *f* 1.90.

Deze aanvulling bevat de examenopgaven met uitwerkingen uit de jaren 1963 tot en met 1966.

H. W. Lenstra

RECREATIE

Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek gelieve men te zenden aan Dr. P. G. J. Vredenduin, Julianaweg 25, Oosterbeek.

200. Zoals bekend wil $A \Leftrightarrow B$ zeggen, dat A en B beide waar of beide onwaar zijn. Hieruit volgt: als $A \Leftrightarrow B$ niet geldt en evenmin $B \Leftrightarrow C$, dan geldt $A \Leftrightarrow C$.

We passen dit resultaat toe op het volgende voorbeeld.

x is even $\Leftrightarrow$ x is een drievoud   is niet juist,
x is een drievoud $\Leftrightarrow$ x is een vijfvoud   is niet juist,

dus

x is even $\Leftrightarrow$ x is een vijfvoud is juist.

Waar zit de fout in de redenering?

201. Bedenk een methode om $2n$ schaakspelers een halve competitie te laten spelen zo, dat n van de spelers n keer met wit spelen en de andere n spelers n—1 keer.

(B. Kootstra).

OPLOSSINGEN

198. $p_1 = 7$, $p_2 = 7^{p_1}$, $p_3 = 7^{p_2}$, . . ., $p_{1001} = 7^{p_{1000}}$.
Wat is het laatste cijfer van p_{1001} (decimaal geschreven)?

De machten van 7 eindigen resp. op

$$7, 9, 3, 1, 7, \ldots \qquad (1)$$

Nu is $p_1 = 3 (\text{mod } 4)$. Dus is

$$p_2 = 7^3 (\text{mod } 4) = 3 (\text{mod } 4).$$

En dus is $p_3 = 3(\text{mod } 4)$, . . ., $p_{1000} = 3(\text{mod } 4)$. Waaruit volgt, in verband met (1), dat het laatste cijfer van p_{1001} een 3 is.

199. Een vijfhoek moet zo in $2n$ delen verdeeld worden, dat er n zeshoeken en n zevenhoeken zijn. Geen hoekpunt van een deel mag een zijde van de vijfhoek of van een der delen in tweeën verdelen.

Evenals in nr. 190 (febr. 1968) kunnen we hier de formule van Euler: $Z + H = R + 1$, toepassen. Deze levert

$$2n + H = \frac{13n + 5}{2} + 1.$$

Allereerst zien we hieruit, omdat het aantal ,,ribben'' een geheel getal moet zijn, dat n oneven moet zijn.

Voor $n = 1$ blijkt een verdeling mogelijk; zie fig. 1.

Verder kan men een zeshoek verdelen in 1 zeshoek en 2 zevenhoeken, en een zevenhoek in 1 zevenhoek en 2 zeshoeken (fig. 2). Doet men dit, dat wordt het aantal zeshoeken en het aantal zevenhoeken met 2 vergroot. Daaruit volgt, dat de verdeling voor elke oneven n mogelijk is.

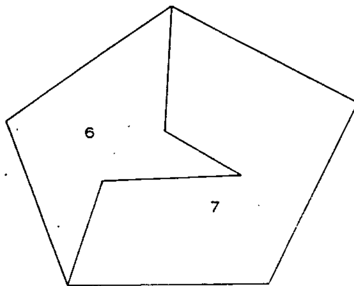


Fig. 1.

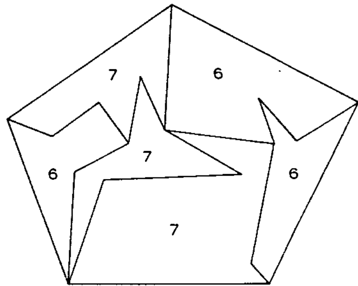


Fig. 2.